УДК 530.1; 539.12

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ ТЕХНИКОЙ БЛОКОВ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

CALCULATION OF FEYNMAN DIAGRAMS USING THE BLOCKS TECHNIQUE

V.V. Andreev

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В работе представлена методика вычисления матричных элементов реакций взаимодействия элементарных частиц с использованием техники «строительных» блоков (базовых элементов фейнмановских диаграмм). В данном подходе матричный элемент редуцируется к базовым матричным элементам с базисными спинорами. Такие блоки рассчитываются заранее в рамках метода базисных спиноров (МБС) и затем используются при дальнейших вычислениях.

Ключевые слова: *базисный спинор, диаграмма Фейнмана, матрица Дирака, фермион.*

A technique for calculating matrix elements of elementary particles interaction reactions using the “building” blocks (basic elements of Feynman diagrams) method is presented. In this approach, the matrix element is reduced to basic matrix elements involving basis spinors. Such blocks are calculated in advance using the Method of Basis Spinors (MBS) and then used for further calculations.

Keywords: *basis spinor, Feynman diagram, Dirac matrix, fermion.*

Введение

На начальных этапах развития физики высоких энергий изучались процессы с небольшим количеством неполяризованных частиц в конечном состоянии. Как правило, необходимая точность вычислений ограничивалась первым порядком теории возмущений по константе взаимодействия. Поэтому для получения наблюдаемых величин было достаточно расчета квадрата модуля матричного элемента с неполяризованными частицами.

Однако прогресс в области экспериментальной техники позволил изучать поляризационные эффекты, которые стали становиться источником новой и нетривиальной информации о процессах взаимодействия элементарных частиц.

Процесс вычисления сечений таких реакций показал, что традиционный метод становится достаточно громоздким. Так, например, вычисление процесса комптоновского рассеяния (в борновском приближении) с учетом поляризаций частиц требует расчетов следов от 12 матриц Дирака. Это приводит, в конечном счете, к тому, что квадрат матричного элемента комптоновского рассеяния содержит свыше 10 тысяч слагаемых. Поэтому вычисление наблюдаемых для некоторых сложных процессов длилось годами, и изложение результатов занимало несколько научных статей.

С ростом мощностей коллайдеров изучение процессов с большим количеством частиц в конечном состоянии (>3) стало неотъемлемой частью научных программ в физике высоких энергий. В данной ситуации количество диаграмм значительно возрастает по сравнению с бинарными реакциями, и метод вычисления квадрата модуля матричных элементов таких процессов приводит к резкому увеличению объемов вычислений.

Повышение точности измеряемых величин потребовало вычисления не только в первом порядке теории возмущений (древесное приближение), но и в более высоких порядках. Вычисления с высокой степенью точности становятся важной составляющей в расчетах процессов взаимодействия. Как и в случае с многочастичными конечными состояниями, в данном случае значительно возрастает число диаграмм Фейнмана и соответственно возрастет объем вычислительной работы.

Таким образом, расчет более высоких порядков теории возмущений, изучение многочастичных процессов, анализ поляризационных эффектов потребовали новых, более эффективных по сравнению с традиционной, схем вычисления наблюдаемых величин.

Метод непосредственного расчета матричных элементов в настоящее стал альтернативным стандартному способу вычисления (расчету квадратов их модулей). Много различных подходов было разработано для непосредственного расчета матричных элементов [1]–[7] и др., и даже краткий обзор обширной литературы по этой теме выходит далеко за рамки этой статьи.

В данной работе развивается техника расчета с использованием редукции матричного элемента фейнмановской диаграммы к основным, заранее рассчитанным блокам. Эти блоки вычисляются в рамках подхода, разработанного в работах [8], [9] и получившего название метода базисных спиноров (МБС). Отличительной особенностью МБС является отсутствие вычисления шпуров от матриц Дирака и элементов спинорной техники, а также возможность получить матричный элемент для всех спиновых состояний частиц одновременно.

1 Техника «строительных» блоков

Амплитуда процесса в квантовополевых теориях представляет собой в заданном порядке теории возмущений, сумму матричных элементов, каждому из которых можно сопоставить некоторую диаграмму Фейнмана. Простейший анализ позволяет выделить элементы фейнмановских диаграмм, которые возникают в следствие структуры лагранжианов теории. Таким элементам относится «фермионный» ток, который далее мы будем называть матричным элементом:

$$M_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p,s_p;k,s_k\right)=\bar{w}^A_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)Q\,w^B_{\lambda_k}\left(k,s_k\right), \quad (1.1)$$

где

$$w^A_\lambda\left(p,s_p\right)=$$

$$=\begin{cases} u_\lambda\left(p,s_p\right), \text{если } A=1 \text{ (фермион)}, \\ \upsilon_\lambda\left(p,s_p\right), \text{если } A=-1 \text{ (антифермион)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Оператор Q представляет собой комбинацию произведений матриц Дирака или их сверток с 4-векторами реакции. В зависимости от вида Q могут возникать различные блоки, такие как спинорные произведения, 4-вектор тока и др.

Наличие базовых элементов фейнмановских диаграмм позволяет сформировать технику вычислений амплитуд процессов, которую можно назвать **техникой «строительных» блоков**. Суть этой методики следующая: матричный элемент редуцируется к основным, заранее рассчитанным блокам. Сами блоки используются как явно скалярные функции. Такая редукция очевидно, позволяет уменьшить число вычисляемых фейнмановских графов за счет повторений «строительных» блоков. К наиболее удачным применениям расчетов такого типа следует отнести расчеты, которые реализованы в программе WPHACT [10].

В данной работе предлагаются для расчета (1.1) использовать блоки, построенные с использованием метода базисных спиноров (МБС), который был разработан в работах [8], [9].

2 Основные соотношения базисных спиноров

В пространстве Минковского введем четверку (тетраду) ортонормированных 4-векторов l_A ($A=0,1,2,3$), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left(l_\mu l_\nu\right)=g_{\mu\nu},\ l_0^2=-l_1^2=-l_2^2=-l_3^2=1, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}l^\mu_{\mu'}l^\nu_{\nu'}l^\rho_{\rho'}l^\sigma_{\sigma'}=-\varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}, \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}l^\mu_0 l^\nu_1 l^\rho_2 l^\sigma_3=\varepsilon^{0123}=1. \quad (2.2)$$

Соотношения (2.2) отражают условие того, что тетрада ортонормированных векторов l_μ имеет фиксированную ориентацию в пространстве Минковского.

Метрический тензор g можно представить в виде линейной комбинации матриц-диад, составленных из этих векторов, т. е.

$$g^{\mu\nu}=l^\mu_0\cdot l^\nu_0-l^\mu_1\cdot l^\nu_1-l^\mu_2\cdot l^\nu_2-l^\mu_3\cdot l^\nu_3. \quad (2.3)$$

Используя векторы l_μ, определим светоподобные векторы, которые образуют изотропную тетраду в пространстве Минковского (об изотропной тетраде см. [11]):

$$b_\rho=\frac{l_0+\rho l_3}{2},\ n_\lambda=\frac{\lambda l_1+il_2}{2},\ (\rho,\lambda=\pm1). \quad (2.4)$$

Из соотношений (2.3), (2.4) следует:

$$\left(b_\rho b_{-\lambda}\right)=\frac{\delta_{\lambda,\rho}}{2},\left(n_\lambda n_{-\rho}\right)=\frac{\delta_{\lambda,\rho}}{2},\left(b_\rho n_\lambda\right)=0, \quad (2.5)$$

$$g^{\mu\nu}=\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[\tilde{b}^\mu_\lambda\cdot b^\nu_{-\lambda}+\tilde{n}^\mu_\lambda\cdot n^\nu_{-\lambda}\right], \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{b}_\rho=2b_\rho,\ \tilde{n}_\lambda=2n_\lambda. \quad (2.7)$$

С помощью векторов изотропной тетрады (2.5) определим *безмассовые базисные спиноры* $u_\lambda\left(b_{-1}\right)$ и $u_\lambda\left(b_1\right)$:

$$\hat{b}_{-1}u_\lambda\left(b_{-1}\right)=0,\ u_\lambda\left(b_1\right)=\hat{b}_1u_{-\lambda}\left(b_{-1}\right), \quad (2.8)$$

$$\omega_\lambda u_\lambda\left(b_{\pm1}\right)=u_\lambda\left(b_{\pm1}\right) \quad (2.9)$$

с проективной матрицей

$$\omega_\lambda=\frac{1}{2}\left(I+\lambda\gamma_5\right) \quad (2.10)$$

и условием нормировки

$$u_\lambda\left(b_{\pm1}\right)\bar{u}_\lambda\left(b_{\pm1}\right)=\omega_\lambda\hat{b}_{\pm1},\ \hat{b}=\left(b^\mu\gamma_\mu\right). \quad (2.11)$$

Фазовое соглашение, которое в случае безмассовых частиц будет определять связь между спинорами с разной спиральностью, выберем в виде

$$\hat{n}_\lambda u_{-\rho}\left(b_{-1}\right)=\delta_{\lambda,\rho}u_\rho\left(b_{-1}\right). \quad (2.12)$$

Соотношения (2.8), (2.9) и (2.12) можно записать в обобщенном виде:

$$\hat{b}_\rho u_\lambda\left(b_A\right)=\delta_{\rho,-A}u_{-\lambda}\left(b_{-A}\right), \quad (2.13)$$

$$\omega_\lambda u_\rho\left(b_A\right)=\delta_{\rho,\lambda}u_\lambda\left(b_A\right), \quad (2.14)$$

$$\hat{n}_\rho u_\lambda\left(b_A\right)=\left(-A\right)\delta_{\rho,A\times\lambda}u_{-\lambda}\left(b_A\right), \qquad (A,\rho,\lambda=\pm1). \quad (2.15)$$

Важным свойством спиноров (2.8) является соотношение полноты, которое доказывается с помощью (2.8), (2.9) и (2.11) и записывается в виде

$$\sum_{\lambda,A=-1}^{1}u_\lambda\left(b_A\right)\bar{u}_{-\lambda}\left(b_{-A}\right)=I. \quad (2.16)$$

Спинорные произведения базисных спиноров (2.8) задаются простыми соотношениями

$$\bar{u}_{\lambda}(b_C)u_{\rho}(b_A) = \delta_{\lambda,-\rho}\ \delta_{C,-A}, \quad (C, A, \lambda, \rho = \pm 1). \tag{2.17}$$

Используя (2.6) матрицу Дирака γ^{μ} представим в виде

$$\gamma^{\mu} = \sum_{\lambda=-1}^{1}\left[\hat{b}_{-\lambda}\tilde{b}_{\lambda}^{\mu} + \hat{n}_{-\lambda}\tilde{n}_{\lambda}^{\mu}\right]. \tag{2.18}$$

Тогда посредством соотношений (2.13), (2.15) и (2.18) получим уравнение

$$\gamma^{\mu}\ u_{\lambda}(b_A) = \tilde{b}_A^{\mu}u_{-\lambda}(b_{-A}) - A\ \tilde{n}_{-A\times\lambda}^{\mu}u_{-\lambda}(b_A), \tag{2.19}$$

которое трансформирует «действие» матрицы Дирака γ^{μ} в комбинацию векторов изотропной тетрады (2.4) на пространстве базисных спиноров (2.8).

Отметим также некоторые свойства базисных спиноров под действием преобразований представлений группы Пуанкаре. Преобразование представления буста $U\left[L_z\left(V_p\right)\right]$ вдоль оси Z, переводящее вектор состояния частицы массы $m = \sqrt{p^2}$ из системы покоя в систему с 4-импульсом $p = \{p_0, 0, 0, |\mathbf{p}|\}$ при действии на базисные спиноры приводит к соотношению:

$$U^{-1}\left[L_z\left(V_p\right)\right]u_{\lambda}(b_A) = \left(\frac{p_0 + Ap}{\sqrt{p^2}}\right)^{1/2}u_{\lambda}(b_A),\ \ p = |\mathbf{p}|. \tag{2.20}$$

Для преобразования вращения $R(\varphi,\theta,-\varphi)$ можно показать, что

$$U^{-1}\left[R(\varphi,\theta,-\varphi)\right]u_{\lambda}(b_A) = \sum_{C=-1}^{1}u_{\lambda}(b_C)D_{A\lambda/2,C\lambda/2}^{1/2}(\varphi,\theta,-\varphi), \tag{2.21}$$

где $D_{\lambda_1,\lambda_2}^{j}(\varphi,\theta,\phi) = \exp(-i\lambda_1\varphi)d_{\lambda_1,\lambda_2}^{j}(\theta)\exp(-i\lambda_2\phi)$ D – функция Вигнера.

Дираковский спинор $w_{\lambda}^{A}\left(p, s_p\right)$ массивного фермиона ($A = 1$) и антифермиона ($A = -1$) с 4-импульсом p и произвольным вектором поляризации s_p построим с помощью проективных операторов спина $1/2$ (о свойствах этих операторов см. [12]–[14])

$$w_{\lambda}^{A}\left(p, s_p\right) = \frac{(A\lambda)}{\sqrt{\left(b_1\left(p + m_p s_p\right)\right)}}\tau_{\lambda}^{A}(p)u_{-A\times\lambda}(b_1) = (A\lambda)\frac{\left(\hat{p} + Am_p\right)\left(1 + \lambda\gamma_5\hat{s}_p\right)}{2\sqrt{\left(b_1\left(p + m_p s_p\right)\right)}}u_{-A\times\lambda}(b_1). \tag{2.22}$$

Безусловно, определение спиноров Дирака посредством (2.22) имеет фазовый произвол, связанный с вычислением нормировочного множителя. В нашем случае фазовый множитель $(A\lambda)$ выбран таким образом, что явный вид дираковских спиноров при выборе представления γ-матриц совпадал с известными классическими формулами в литературе [15].

3 Базовый матричный элемент и «строительные» блоки МБС

Рассмотрим специальный случай матричного элемента (1.1), когда $p = b_C$ и $k = b_{-A}$ т. е.

$$\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}[Q] = \bar{u}_{\rho}(b_C)Q\ u_{-\sigma}(b_{-A}), \tag{3.1}$$

который можно назвать **базовым матричным элементом**.

С помощью условия полноты (2.16) можно разбить матричный элемент (1.1), соответствующий в диаграмме Фейнмана фермионной линии, на комбинацию базовых матричных элементов (3.1):

$$\begin{aligned} &M_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p, s_p\ k, s_k; Q\right) = \\ &= \sum_{A,\,C,\sigma,\,\rho=-1}^{1}\left\{\bar{w}_{\lambda_p}^{D}\left(p, s_p\right)u_{-\sigma}(b_{-C})\right\}\times \\ &\times\left\{\bar{u}_{\sigma}(b_C)Qu_{-\rho}(b_{-A})\right\}\left\{\bar{u}_{\rho}(b_A)w_{\lambda_k}^{F}(k, s_k)\right\} = \\ &= \sum_{\sigma,\,\rho=-1}^{1}\sum_{A,\,C=-1}^{1}\bar{s}_{\sigma,\lambda_p}^{(C,\,D)}\left(p, s_p\right)\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}[Q]s_{\rho,\lambda_k}^{(A,\,F)}(k, s_k). \end{aligned} \tag{3.2}$$

В соотношении (3.2) выделены коэффициенты разложения $s, \bar{s}$ физических спиноров по базисным спинорам, которые сводятся к базовому матричному элементу $\Gamma[Q]$:

$$s_{\rho,\lambda}^{(A,\,D)}\left(p, s_p\right) = \bar{u}_{\rho}(b_A)w_{\lambda}^{D}\left(p, s_p\right) = \tag{3.3}$$

$$= \frac{(D\lambda)}{2\sqrt{\left(b_1\left(p + m_p s_p\right)\right)}}\Gamma_{\rho,D\times\lambda}^{A,-1}\left[\left(\hat{p} + Dm_p\right)\left(1 + \lambda\gamma_5\hat{s}_p\right)\right],$$

$$\bar{s}_{\rho,\lambda}^{(A,\,B)}\left(p, s_p\right) = s_{-\rho,\lambda}^{*(-A,\,B)}\left(p, s_p\right). \tag{3.4}$$

Таким образом, МБС обладает возможностью, которая увеличивает его эффективность и делает достаточно мощным средством для расчетов сложных матричных элементов. Для повышения эффективности проведем расчет для базовых матричных элементов – «строительных» блоков МБС с различными операторами Q для спиральных состояний.

4 «Строительные» блоки МБС

Для спиральных состояний в качестве преобразования от системы покоя частицы массы m_p к системе, в которой ее 4-импульс равен p берется преобразование

$$H_p = R\left(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p\right)L_z\left(V_p\right), \tag{4.1}$$

где $L_z\left(V_p\right)$ преобразование буста вдоль оси Z, а преобразование $R\left(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p\right)$ задает поворот от оси Z к импульсу $\mathbf{p}$ с сферическими углами

φ_p, θ_p. В этом случае вектор поляризации частицы ζ_p задается уравнением

$$\zeta_p = \left\{ \frac{|\mathbf{p}|}{m_p}, \frac{p_0}{m_p} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right\}. \quad (4.2)$$

А это и означает, что осью проекции спина является импульс частицы $\mathbf{p}$, т. е. мы имеем поляризационное состояние частицы с определенной спиральностью.

Найдем выражение для $Q = \hat{\varepsilon}_\sigma(k)$, где $\varepsilon_\sigma^\mu(k)$ – вектор поляризации фотона с 4-импульсом k. Данный 4-вектор может быть получен посредством преобразованием Лоренца H_k (4.1) из вектора изотропной тетрады $\tilde{n}_\sigma$ т. е.

$$\varepsilon_\sigma(k) = (-1)\frac{\sigma}{\sqrt{2}} H_k \tilde{n}_\sigma =$$
$$= (-1)\frac{\sigma}{\sqrt{2}} R(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) L_z(k) \tilde{n}_\sigma, \quad (4.3)$$
$$(\sigma = \pm 1).$$

Так как преобразование $L_z(k)$ оставляет 4-вектор $\tilde{n}_\sigma$ неизменным, то для соответствующего базового матричного элемента имеем, что (смотри уравнение (2.21))

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}\left[\hat{\varepsilon}_\sigma(k)\right] = \bar{u}_\rho(b_C)\hat{\varepsilon}_\sigma(k) u_{-\lambda}(b_{-A}) =$$
$$= (-1)\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \bar{u}_\rho(b_C) U[R(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k)] \times$$
$$\times \hat{\tilde{n}}_\sigma U^{-1}[R(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k)] u_{-\lambda}(b_{-A}) = \quad (4.4)$$
$$= (-1)\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{\tau_1,\tau_2=-1}^{1} \bar{u}_\rho(b_{\tau_2}) \hat{\tilde{n}}_\sigma u_{-\lambda}(b_{\tau_1}) \times$$
$$\times D^{*1/2}_{C\rho/2,\tau_2\rho/2}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) D^{1/2}_{A\lambda/2,-\tau_1\lambda/2}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k).$$

Используя, что

$$\bar{u}_\rho(b_{\tau_2}) \hat{\tilde{n}}_\sigma u_{-\lambda}(b_{\tau_1}) = (-2\tau_1)\delta_{\rho,-\lambda}\delta_{\tau_2,-\tau_1}\delta_{\tau_1,-\sigma\lambda} \quad (4.5)$$

получаем выражение:

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}\left[\hat{\varepsilon}_\sigma(k)\right] =$$
$$= (-1)\frac{C\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{3 + AC}\,\delta_{\rho,-\lambda} D^1_{(A+C)\lambda/2,\sigma}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k), \quad (4.6)$$
$$(\sigma = \pm 1).$$

Последнее соотношение получено с помощью разложения Клебша – Гордана для D-матриц:

$$D^{1/2}_{\lambda_1,\lambda_2}(\varphi, \theta, -\varphi) D^{1/2}_{\sigma_1,\sigma_2}(\varphi, \theta, -\varphi) =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(3 + 4\lambda_1\sigma_1)}\sqrt{(3 + 4\lambda_2\sigma_2)} \times$$
$$\times D^1_{\lambda_1+\sigma_1,\lambda_2+\sigma_2}(\varphi, \theta, -\varphi) + \quad (4.7)$$
$$+ 2\lambda_1\lambda_2\delta_{\lambda_1,-\sigma_1}\delta_{\lambda_2,-\sigma_2}, \ (\lambda_{1,2}, \sigma_{1,2} = \pm 1/2).$$

По аналогии с вышеприведенными выкладками можно найти выражения и для других операторов Q.

Для базового матричного элемента с $Q = \hat{\varepsilon}_\sigma(p)$, где $\varepsilon_\sigma^\mu(p)$ вектор поляризации векторного массивного бозона с 4-импульсом

$$p = \{p_0, |\mathbf{p}|\sin\theta_p \cos\varphi_p, |\mathbf{p}|\sin\theta_p \sin\varphi_p, |\mathbf{p}|\cos\theta_p\}$$

после ряда преобразований получим, что

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}\left[\hat{\varepsilon}_\sigma(p)\right] = \left[\left(\frac{p_0}{\sqrt{p^2}}\delta_{\sigma,0} - \sigma\delta_{\sigma^2,1}\right) \times\right.$$
$$\times \frac{C}{\sqrt{2}}\sqrt{3 + AC} D^1_{(A+C)\lambda/2,\sigma}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) + \quad (4.8)$$
$$\left. + \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{p^2}}\delta_{\sigma,0}\delta_{C,-A}\right]\delta_{\rho,-\lambda}, \quad (\sigma = 0, \pm 1).$$

Выражение для базового матричного элемента с $Q = \hat{p}\hat{\varepsilon}_\sigma(p)$ запишется в виде

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}\left[\hat{p}\hat{\varepsilon}_\sigma(p)\right] = \frac{C}{\sqrt{2}}\sqrt{3 - AC} \times$$
$$\times \left(\sigma\delta_{\sigma^2,1}(p_0 - \lambda\sigma|\mathbf{p}|) - \sqrt{p^2}\delta_{\sigma,0}\right) \times \quad (4.9)$$
$$\times D^1_{(A-C)\lambda/2,\sigma}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p)\delta_{\rho,\lambda}, (\sigma = 0, \pm 1).$$

Более сложным примером базового элемента являются коэффициенты разложения биспинора (2.22) по базисным спинорам. Для спиральных состояний имеем, что [9]

$$s_{\rho,\lambda}^{(A,D)}(p, s_H) = (D\lambda) f_{\rho\lambda,D} \sqrt{p_0 - (D\lambda\rho)|\mathbf{p}|} \times$$
$$\times D^{*1/2}_{A\rho/2,-D\lambda/2}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p), \quad (4.10)$$

где

$$f_{\lambda\rho,D} = \delta_{\rho,-\lambda} + D\delta_{\rho,\lambda}. \quad (4.11)$$

Запишем еще ряд простых соотношений для базовых элементов:

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}[\omega_\alpha] = \delta_{\rho,\lambda}\delta_{C,A}\delta_{\alpha,-\lambda} \ (\alpha = \pm 1), \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}\left[Q\sum_{\alpha=-1}^{1}\omega_\alpha g_\alpha\right] = g_{-\lambda}\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A}[Q], \ (\alpha = \pm 1), \quad (4.13)$$

$$\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}[Q_1 Q_2] = \sum_{D,\lambda=-1}^{1}\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,D}[Q_1]\,\Gamma_{\lambda,\sigma}^{D,A}[Q_2]. \quad (4.14)$$

5 Пример расчета техникой «строительных» блоков

Применим методику «строительных» блоков для вычисления борновской амплитуды векторного бозона V массы m_V и спиральности τ в пару фермионов

$$V(p,\tau) \to f_i(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{f}_j(k_2, \lambda_{k_2}), \quad (5.1)$$

где f фермион со спиральностью λ.

Матричный элемент распада запишется в обобщенном виде:

$$M^\tau_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\left(V \to f_i \bar{f}_j\right) =$$
$$= R^V_{ij}\bar{u}_{\lambda_{k_1}}(k_1, m_1)\hat{\varepsilon}_\tau(p)\left[\sum_{\alpha=-1}^{1}\omega_\alpha g_\alpha^{Vff}\right]\upsilon_{\lambda_{k_2}}(k_2, m_2), \quad (5.2)$$

где $g_{\pm 1}^{Vf\overline{f}}$ – L,R константы, генерируемые вершиной $Vf\overline{f}$, а R_{ij}^{V} является функцией фермионных зарядов и элементов СКМ-матрицы.

Матричный элемент (5.2) с помощью соотношения полноты представим в виде блоков МБС (см. (3.2))

$$M_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}^{\tau}\left(V \to f_i \overline{f}_j\right) = \\ = R_{ij}^{V} \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} \sum_{A,C=-1}^{1} \overline{s}_{\rho,\lambda_{k_1}}^{(C,1)}(k_1) \Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A} \times \\ \times \left[\hat{\varepsilon}_{\tau}(p) \sum_{\alpha=-1}^{1} \omega_{\alpha} g_{\alpha}^{Vf\overline{f}}\right] s_{\sigma,\lambda_{k_2}}^{(A,-1)}(k_2) = \\ = R_{ij}^{V} \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} \sum_{A,C=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} \overline{s}_{\rho,\lambda_{k_1}}^{(C,1)}(k_1) \times \\ \times \Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}\left[\hat{\varepsilon}_{\tau}(p)\right] s_{\sigma,\lambda_{k_2}}^{(A,-1)}(k_2). \tag{5.3}$$

Рассмотрим распад (5.1) в системе покоя бозона V т. е.

$$P^{\mu} = (M_V, 0, 0, 0), \\ k_1^{\mu} = (E_{k_1}, |\mathbf{k}|\sin\theta, 0, |\mathbf{k}|\cos\theta), \\ k_2^{\mu} = (E_{k_2}, -|\mathbf{k}|\sin\theta, 0, -|\mathbf{k}|\cos\theta), \tag{5.4}$$

$$|\mathbf{k}| = \frac{\sqrt{M_V^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2M_V^2(m_1^2 + m_2^2)}}{2M_V} = M_V \kappa,$$

$$E_{k_1} = \frac{M_V^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M_V}, \\ E_{k_2} = \frac{M_V^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M_V}. \tag{5.5}$$

Используя коэффициенты разложения (4.10) и блок (4.8) для $\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}\left[\hat{\varepsilon}_{\tau}(p)\right]$ получим, что

$$M_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}^{\tau}\left(V \to f_i \overline{f}_j\right) = \\ = R_{ij}^{V} \sum_{\sigma=-1}^{1} \sum_{A,C=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} \sqrt{\frac{3+AC}{2}} \delta_{\sigma(C+A)/2,\tau} \times \\ \times \left(\tau\delta_{\tau^2,1} - \delta_{\tau,0}\right) \sqrt{\left(E_{k_2} + \lambda_{k_2}\sigma|\mathbf{k}|\right)\left(E_{k_1} - \lambda_{k_1}\sigma|\mathbf{k}|\right)} \times \\ \times D_{A\sigma/2,-\lambda_{k_2}/2}^{*1/2}(\varphi,\theta,-\varphi) D_{C\sigma/2,\lambda_{k_1}/2}^{*1/2}(\varphi,\theta,-\varphi) = \\ = R_{ij}^{V} \sum_{\sigma=-1}^{1} \sum_{A=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} \sqrt{1+A\sigma\tau} \times \\ \times \sqrt{\left(E_{k_2} + \lambda_{k_2}\sigma|\mathbf{k}|\right)\left(E_{k_1} - \lambda_{k_1}\sigma|\mathbf{k}|\right)} \times \\ \times \left(\tau\delta_{\tau^2,1} - \delta_{\tau,0}\right) D_{A\sigma/2,-\lambda_{k_2}/2}^{*1/2}(\varphi,\theta,-\varphi) \times \\ \times D_{\tau-A\sigma/2,\lambda_{k_1}/2}^{*1/2}(\varphi,\theta,-\varphi). \tag{5.6}$$

С помощью разложения Клебша-Гордана для D-функций Вигнера (4.7) и с учетом того, что $\varphi = 0$ после суммирования по индексу A приходим к выражению

$$M_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}^{\tau}\left(V \to f_i \overline{f}_j\right) = \\ = d_{\tau,(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})/2}^{1}(\theta) R_{ij}^{V} \left(\tau\delta_{\tau^2,1} - \delta_{\tau,0}\right) \sqrt{\frac{3-\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}{2}} \times \\ \times \sum_{\sigma=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} \sqrt{\left(E_{k_2} + \lambda_{k_2}\sigma|\mathbf{k}|\right)\left(E_{k_1} - \lambda_{k_1}\sigma|\mathbf{k}|\right)}. \tag{5.7}$$

Для функции $\sqrt{\left(E_{k_2} + \tau|\mathbf{k}|\right)\left(E_{k_1} + \rho|\mathbf{k}|\right)}$ после преобразований в системе покоя, приходим к соотношению

$$\sqrt{\left(E_{k_2} + \tau|\mathbf{k}|\right)\left(E_{k_1} + \rho|\mathbf{k}|\right)} = \\ = \frac{M_V}{\sqrt{2}}\left[\delta_{\tau,\rho}\sqrt{1 - \tilde{m}_+ + 2\rho\kappa} + \delta_{\tau,-\rho}\sqrt{\tilde{m}_+ - \tilde{m}_-^2 + 2\rho\tilde{m}_-\kappa}\right] = \\ = \frac{M_V}{\sqrt{2}}\left[\delta_{\tau,\rho} Y_{\rho}^{(I)} + \delta_{\tau,-\rho}\sqrt{2} Y_{\rho}^{(II)}\right], \tag{5.8}$$

где

$$\tilde{m}_{\pm} = \frac{m_1^2 \pm m_2^2}{M_V^2}, \quad \kappa = \frac{|\mathbf{k}|}{M_V}.$$

Тогда используя (5.8), получаем, что матричный элемент (5.7) принимает компактный вид

$$M_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}^{\tau}\left(V \to f_i \overline{f}_j\right) = \\ = d_{\tau,(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})/2}^{1}(\theta) R_{ij}^{V} \left(\tau\delta_{\tau^2,1} - \delta_{\tau,0}\right) M_V \times \\ \times \sum_{\sigma=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} \left[\delta_{\lambda_{k_2},-\lambda_{k_1}} Y_{\lambda_{k_2}\sigma}^{(I)} + \delta_{\lambda_{k_2},\lambda_{k_1}} Y_{\lambda_{k_2}\sigma}^{(II)}\right]. \tag{5.9}$$

Если $m_1 = m_2 = 0$, то (5.9) редуцируется к виду

$$M_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}^{\tau}\left(V \to f_i \overline{f}_j\right) = \\ = \delta_{\lambda_{k_2},-\lambda_{k_1}} M_V g_{\lambda_{k_2}}^{Vf\overline{f}} R_{ij}^{V} \left(\tau\delta_{\tau^2,1} - \delta_{\tau,0}\right) d_{\tau,\lambda_{k_1}}^{1}(\theta). \tag{5.10}$$

Парциальная ширина распада неполяризованного векторного бозона в неполяризованную фермионную пару в системе покоя определяется стандартным образом:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{3}\frac{|\mathbf{k}|}{32\pi^2 M_V^2} \times \\ \times \sum_{\tau=-1,0}^{1} \sum_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}=-1}^{1} \left|M_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}^{\tau}\left(V \to f_i \overline{f}_j\right)\right|^2. \tag{5.11}$$

Ширина распада $V \to f_1 \overline{f}_2$

$$\Gamma = \int \frac{d\Gamma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \frac{d\Gamma}{d\Omega} \tag{5.12}$$

с помощью соотношения

$$\frac{(2j+1)}{2}\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left|d_{\sigma,\rho}^{j}(\theta)\right|^2 = 1 \tag{5.13}$$

и уравнения (5.9) запишется в виде:

$$\Gamma\left(V \to f_i \overline{f}_j\right) = \frac{|\mathbf{k}|}{24\pi}\left|R_{ij}^{V}\right|^2 \times \\ \times \sum_{\lambda_{k_1}=-1}^{1}\left(\left|\sum_{\sigma=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} Y_{\lambda_{k_1}\sigma}^{(I)}\right|^2 + \left|\sum_{\sigma=-1}^{1} g_{-\sigma}^{Vf\overline{f}} Y_{\lambda_{k_1}\sigma}^{(II)}\right|^2\right). \tag{5.14}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим распад $W \to \ell\overline{\nu}_{\ell}$. В этом случае

$$M_V = M_W, m_1 = m_\ell, m_2 = 0$$

и

$$g_\lambda^{W\ell\nu} = \delta_{\lambda,-1}\frac{1}{\sqrt{2}s_W}, R_{ij}^W = (-1)\sqrt{4\pi\alpha}, \quad (5.15)$$

где α – постоянная тонкой структуры; s_W – синус угла Вайберга-Салама.

Тогда из (5.14), (5.15) и (5.8) следует, что

$$\Gamma\left(W \to \ell\bar{\nu}_\ell\right) = = \frac{\alpha}{12 s_W^2}\left(\frac{M_W^2 - m_\ell^2}{2M_W}\right)\left(1 - \frac{m_\ell^2}{2M_W^2} - \frac{m_\ell^4}{2M_W^4}\right). \quad (5.16)$$

Ширина распада (5.16) совпадает с известными в литературе выражениями (например, [16], [17]), что подтверждает правильность предлагаемой методики.

Заключение

В работе представлена методика расчета матричных элементов техникой строительных блоков, полученных в рамках МБС.

Согласно данной методики спинорная структура, соответствующая фермионной линии, сводится к суперпозиции базовых матричных элементов.

Большая часть базовых конструкций можно рассчитать отдельно и затем использовать как готовые функции при вычислении процессов взаимодействия элементарных частиц. Таким образом, задача вычисления фейнмановской диаграммы состоит в преобразовании возникающего аналитического выражения к базовым матричным элементам с последующей подстановкой и элементарным суммированием. При этом основная часть сумм, возникающих в процессе вычисления, снимается за счет присутствия символов Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bellomo*, *E.* Sull'uso degli operatori di proenzione per ottenere gli elementi di'matrice per particelle di spin 1/2 / E. Bellomo // Nuovo Cimento. – 1961. – Vol. 21, № 5. – P. 730–739.

2. *Богуш*, *А.А.* Ковариантное описание спиновых релятивистских частиц и его применение / А.А. Богуш, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер.фіз.-тэхн. навук. – 1962. – № 2. – С. 26–38.

3. *Федоров*, *Ф.И.* Ковариантное вычисление матричных элементов / Ф.И. Федоров // Известия Вузов. Физика. – 1980. – № 2. – С. 32–45.

4. *Single bremsstrahlung processes in gauge theories* / F.A. Berends [et al.] // Phys. Letters. – 1981. – Vol. B103. – P. 124–129.

5. *Галынский*, *М.В.* Диагональный спиновый базис и вычисление процессов с поляризованными частицами / М. В. Галынский, С. М. Сикач // ЭЧАЯ. – 1998. – Т. 29. – С. 1133–1193.

6. *Ballestrero*, *A.* A new method for helicity calculations / A. Ballestrero, E. Maina // Phys. Lett. – 1995. – Vol. B350. – P. 225–233.

7. *Dittmaier, S.* Weyl-van-der-Waerden formalism for helicity amplitudes of massive particles / S. Dittmaier // Phys. Rev. – 1999. – Vol. D59. – P. 016007–1–14.

8. *Андреев*, *В.В.* Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В. В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, № 2. – С. 410–420.

9. *Андреев*, *В. В.* Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В. В. Андреев. – Гомель: УО "Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины", 2008. – 294 с.

10. *Accomando*, *E.* WPHACT 2.0: A fully massive Monte-Carlo generator for four fermion physics at e+ e- colliders / E. Accomando, A. Ballestrero, E. Maina // Comput. Phys. Commun. – 2003. – Vol. 150. – P. 166–196.

11. *Borodulin*, *V.I.* CORE -COmpendium of Relations / V.I. Borodulin, R.N. Rogalev, S.R. Slabospitsky. – Protvino, Russia: IHEP, 1995. – 108 p. – (Preprint IHEP 95-90).

12. *Федоров*, *Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Москва : Наука, 1979. – 384 с.

13. *Богуш*, *А.А.* Введение в полевую теорию элементарных частиц / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1981. – 390 с.

14. *Богуш*, *А.А.* Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.

15. *Хелзен*, *Ф.* Кварки и лептоны. Введение в физику частиц / Ф. Хелзен, А. Мартин. – Москва : Мир , 1987. – 456 с.

16. *Denner*, *A.* The *W*-boson width / A. Denner, T. Sack // Zeitschrift für Physik C Particles and Fields. – 1990. – Vol. 46, № 4. – P. 653–663.

17. *Bardin*, *D.* The Standard Model in the Making Precision Study of the Electroweak Interactions / D. Bardin, G. Passarino. – Oxford University Press, 1999. – 704 p.

Поступила в редакцию 28.04.14.